Chapitre II
La théorie de la production et des coûts

1. Aspects techniques

1.1 Concepts de base

- Notation

Soit $y = (y_1, \ldots, y_\ell)$ un vecteur de production nette

où $\quad y_h = b_h - a_h \qquad\qquad b_h, a_h \geq 0$

$y_h < 0$: input $\qquad$ si : $\quad b_h = 0$ i.e. $\quad y_h = -a_h$

$\qquad\qquad b_h < a_h \Rightarrow \quad b_h - a_h < 0$

$y_h > 0$: output $\qquad$ si : $\quad a_h = 0$ i.e. $\quad y_h = b_h$

$\qquad\qquad b_h > a_h \Rightarrow \quad b_h - a_h > 0$

- Ensemble de production ou ensemble technologique : P

Définition : L'ensemble de production est l'ensemble de tous les vecteurs de production nette qui sont techniquement possibles (réalisables).

On écrit alors $\quad y \in P$

Remarque L'ensemble P dépend du producteur. C'est donc dire que chaque producteur j aura son ensemble P_j.

- Fonction de production

Représentation de l'ensemble de production par une fonction numérique.

Définition : Une fonction de production est une fonction $f : \Re^\ell \rightarrow \Re$ telle que

$f(y_1, y_2, \ldots, y\ell) \leq 0.$

$\therefore \; (y_1, y_2, \ldots, y_\ell) \in P \qquad \Leftrightarrow \qquad f(y_1, \ldots, y_\ell) \leq 0.$

- Efficience technique

Définition : y^1 est techniquement efficace si $y^1 \in P$ et s'il n'existe pas $y^2 \in P$ tel que

$y_h^2 \geq y_h^1, \qquad h = 1, 2, \ldots, \ell$.

Ex. $y^1 = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ -4 \\ -3 \end{bmatrix}$ est techniquement efficace s'il n'existe pas $y^2 \in P$: $y^2 = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ -3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$\Rightarrow$ Pour l'ensemble de production :
les vecteurs techniquement efficaces vont appartenir à la frontière de P

$\Rightarrow$ pour la fonction de production : $f(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) = 0$

$\therefore$ y est techniquement efficace $\Rightarrow$ $f(y) = 0$
y est techniquement réalisable $\Rightarrow$ $f(y) \leq 0$

Remarque sur la fonction de production

Soit $f(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) = 0$ la forme générale.

De cette forme générale, on peut tirer la forme particulière suivante :

$f(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) = y_1 - g^*(y_2, y_3, \ldots, y_\ell) = 0$

$$\text{ou} \qquad y_1 = g^*(y_2, y_3, \dots, y_\ell)$$

En utilisant la notation «a_h, b_h», on peut aussi écrire :

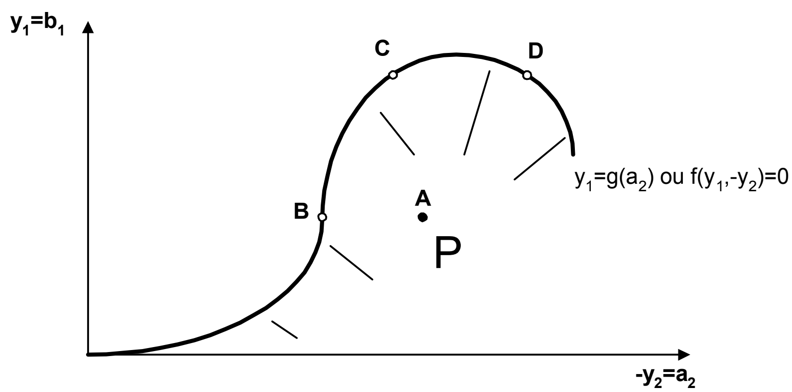
$$b_1 = g^*(-a_2, -a_3, \dots, -a_\ell)$$

$$b_1 = g(a_2, a_3, \dots, a_\ell) \qquad \text{forme usuelle des manuels}$$

- <u>Représentation graphique de P (efficience technique)</u>

Considérons le cas d'une activité de production impliquant un seul output $y_1 = b_1$ disons la bière) et un seul input $-y_2 = a_2$ (disons le travail) (**voir graphique 2-01**)

2- 01 •



Tout les points (vecteurs) de P ne sont pas d'un intérêt égal. Ainsi, le point A semble en un sens «inférieur» aux points B ou C : c'est qu'on peut obtenir autant de bière en B pour moins de travail ou plus de bière en C pour le même travail.

$\therefore$ B et C sont techniquement efficaces ($\in$ P) ;
A est réalisable mais non techniquement efficace.

A est un vecteur $(y_1, -y_2)$ tel que $f(y_1, -y_2) < 0$.

En général, y efficace $\Rightarrow$ $f(y) = 0$ mais l'inverse n'est pas nécessairement vrai : ex., le point D.

Remarques :

- Une fonction de production ne nous permet pas de tenir compte à la fois du phénomène de proportionnalité ou de coefficients fixes (complémentarité des inputs) utilisé par Marx ou Walras et de la possibilité de substitution entre les inputs utilisés par Pareto. Toutefois, l'approche moderne basée sur les ensembles de production peut tenir compte de ces deux aspects. C'est donc une approche plus générale.

- Dans certains cas, il peut être intéressant de spécifier davantage le contexte dans lequel la technologie de la firme est définie. Par exemple, à court terme, certains inputs peuvent être fixés alors qu'ils deviendront variables à long terme. Cela aura évidemment un impact sur les possibilités techniques de la firme. On distinguera alors la fonction de production (ou ensemble de production) à court et à long terme.

1.2 Étude de la fonction de production : forme particulière

1.2.1 Notation

$$y_1 = g^*(y_2, \ldots, y_\ell)$$

$$b_1 = g(a_2, \ldots, a_\ell)$$

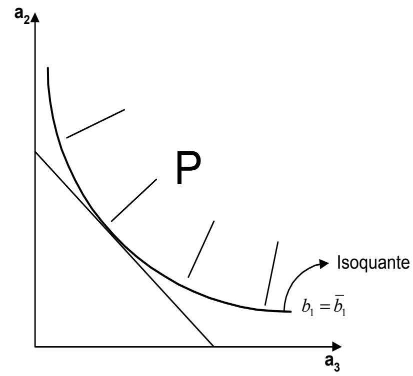
Exemples

1. La technologie Cobb-Douglas $\rightarrow$ $b_1 = Aa_2^{\alpha}a_3^{\beta}$ $\qquad \alpha, \beta > 0$
2. La technologie Leontief $\rightarrow$ $b_1 = \min(\alpha a_2, \beta a_3)$ $\qquad \alpha, \beta > 0$

1.2.2 Représentation graphique

1) La technologie Cobb-Douglas : Posons $b_1 = \bar{b}_1$

2- 02



la fonction s'écrit $\bar{b}_1 = a_2^{\alpha} a_3^{\beta}$ (**voir graphique 2-02**)

équation de la courbe isoquante : $a_2 = \bar{b}_1^{\,1/\alpha}\, a_3^{-\beta/\alpha}$

ensemble de production P : $\{ (a_2, a_3) \mid a_2^{\alpha} a_3^{\beta} \geq \bar{b}_1 \}$

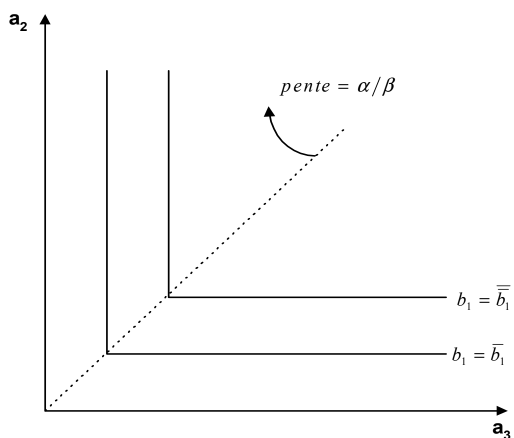
2) La technologie Leontief

Posons $b_1 = \bar{b}_1$

La fonction s'écrit : $\bar{b}_1 = \min(\alpha a_2, \beta a_3)$

2- 03

(**voir graphique 2-03**)



1.2.3 <u>TMST et Pm</u>

- Hypothèse de base : g est deux fois continûment dérivable ($g \in C^2$)

$$g_r = \frac{\partial g}{\partial a_r} = \frac{\partial b_1}{\partial a_r} \qquad \text{existent et sont continues}$$

$$g_{rs} = \frac{\partial^2 g}{\partial a_r \partial a_s} = \frac{\partial^2 b_1}{\partial a_r \partial a_s} \qquad \text{existent et sont continues}$$

Considérons la différentielle totale de g :

$$db_1 = g_2 da_2 + g_3 da_3 + \ldots + g_\ell da_\ell$$

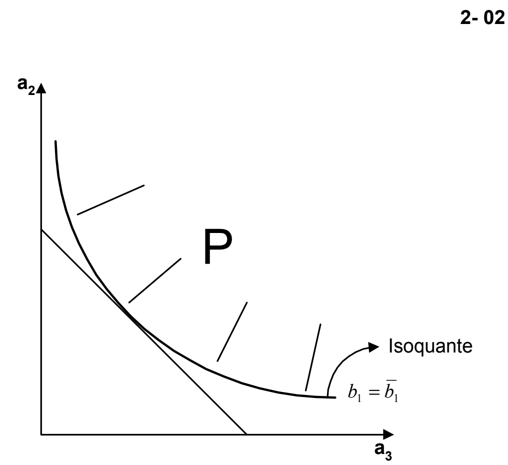
- Posons $db_1 = 0$ et $da_h = 0$ sauf pour h = r, s

$$0 = g_r da_r + g_s da_s$$

$$\frac{da_r}{da_s} = -\frac{g_s}{g_r}$$ = pente de l'isoquante

= TMST (taux marginal de substitution technique)

(**voir graphique 2-02**)



Le TMST définit l'efficacité relative de l'input r par rapport à l'input s, i.e. combien d'input r supplémentaire on doit fournir suite à une diminution de une unité de l'input s pour garder le même niveau d'output.

- Posons $da_h = 0$ sauf pour h = s

$$db_1 = g_s da_s$$

$$\frac{db_1}{da_s} = g_s$$ = pente de la fonction de production

= P_m, productivité marginale de l'input s

(**voir graphique 2-04**)

2- 04

Exemple : La technologie Cobb-Douglas

$b_1 = g(a_2, a_3)$	$Q = A\, K^{\alpha}\, L^{\beta}$
$dy_1 = g_2 da_2 + g_3 da_3$	
$da_2 / da_3 = -g_3 / g_2$ (TMST)	$dK/dL = -\beta/\alpha\ K/L$ (TMST)
$db_1 / da_2 = g_2$ (Pm)	$dQ / dK = A\alpha\, K^{\alpha-1}\, L^{\beta}$ (Pm_K)
$db_1 / da_3 = g_3$ (Pm)	$dQ / dL = A\beta\, K^{\alpha}\, L^{\beta-1}$ (Pm_L)

1.2.4 Rendements marginaux et rendements à l'échelle

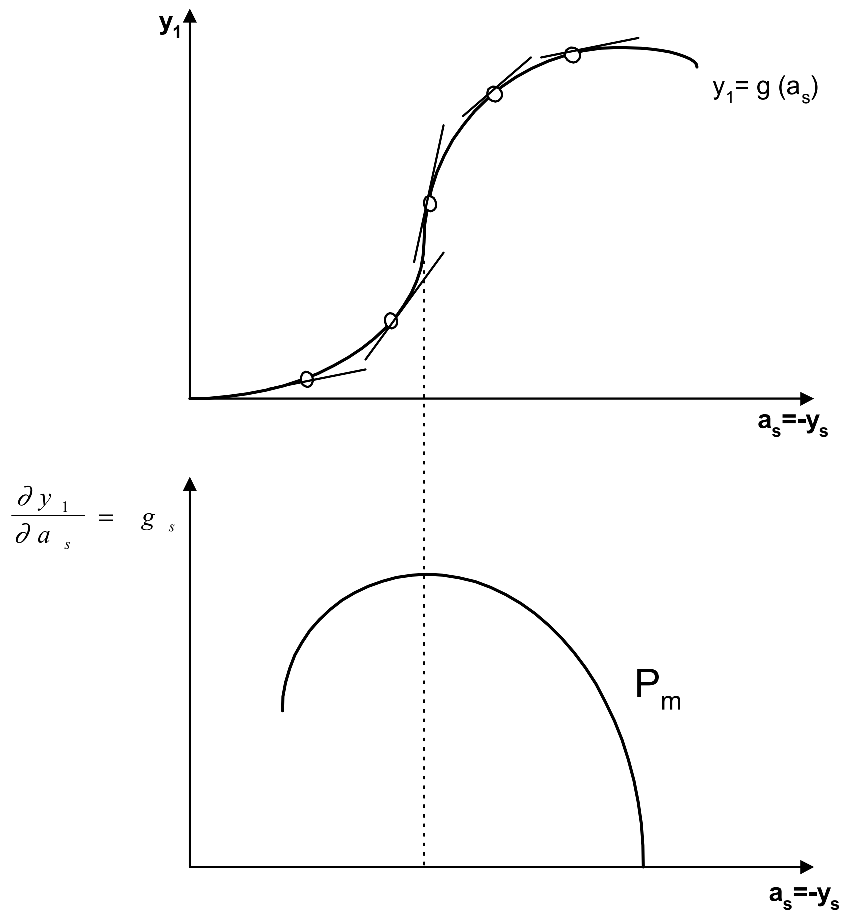
- Rendements marginaux

Ce concept fait référence à la façon dont la productivité marginale d'un facteur varie lorsqu'on augmente (dimimue) l'utilisation de ce facteur.

Loi des rendements marginaux décroissants : «Si on augmente la quantité d'un facteur variable en maintenant fixe l'utilisation de tous les autres inputs, il est un point au-delà duquel la production totale augmente à un rythme sans cesse décroissant».

(**voir graphique 2-05**)

2- 05



<u>Exemple</u> : utilisation de fertilisants sur une terre agricole.

- <u>Rendement à l'échelle</u>

Ce concept fait référence à la façon dont la production ou l'output varie lorsque tous les facteurs de production varient dans la même proportion.

<u>Définition</u> : Soit $b_1 = g(a_2, a_3, \ldots , a_\ell)$.

On dira que la fonction de production est caractérisée par des rendements à l'échelle :

croissant :			$>$	
constants :	ssi	$g(\lambda a_2, \lambda a_3, \ldots, \lambda a_\ell)$	$=$	$\lambda g(a_2, a_3, \ldots, a_\ell)$
décroissants :			$<$	

Lien avec les fonctions homogènes :

Si g est une fonction homogène de degré k, g est caractérisée par des rendements à l'échelle :

croissants:		$k > 1$
constants :	ssi	$k = 1$
décroissants :		$k > 1$

Exemple : $Q = A K^{\alpha} L^{\beta}$ est homogène de degré $(\alpha + \beta)$

Remarques :

1) L'hypothèse la plus fréquente est celle des rendements à l'échelle non croissants (en particulier, si on a des rendements à l'échelle constants, cette hypothèse est satisfaite).

2) Qu'est-ce qui peut causer des rendements décroissants plutôt que constants ? Le fait, par exemple, qu'on ait mal identifié tous les inputs qui interviennent dans une opération productive.

   Exemples : la terre dans une entreprise agricole ; le temps ou la capacité de travail d'un chef d'entreprise.

3) Qu'est-ce qui peut causer des rendements croissants ? La présence d'indivisibilités importantes (ou, en d'autres termes, des coûts fixes importants).

4) L'hypothèse des rendements à l'échelle non croissants (i.e. rendements constants ou décroissants) est une hypothèse de «facilité» (en ce sens qu'elle facilite beaucoup les

choses d'un point de vue purement technique). Toutefois, elle n'est pas des plus «réalistes».

- Rendements marginaux vs rendements à l'échelle

Ne pas confondre les deux concepts.

La présence de rendements à l'échelle constants n'est pas contradictoire avec celle des rendements marginaux décroissants.

Exemple : $b_1 = a_2^{\frac{1}{2}} a_3^{\frac{1}{2}}$

1° $g(\lambda a_2, \lambda a_3) = (\lambda a_2)^{\frac{1}{2}} \ (\lambda a_3)^{\frac{1}{2}}$

$= \lambda \ a_2^{\frac{1}{2}} a_3^{\frac{1}{2}}$

$= \lambda \ g(a_2, a_3) \quad = \lambda b_1$

$\therefore$ rendements à l'échelle constants

2° $g_2 = \partial b_1 / \partial a_2 = \frac{1}{2} \ a_2^{-\frac{1}{2}} \ a_3^{\frac{1}{2}}$

$g_{22} = \partial^2 b_1 / \partial a_2^2 = -\frac{1}{4} \ a_2^{-3/2} \ a_3^{\frac{1}{2}}$

$<$ 0 (i.e. la Pm de l'input a_2 est décroissante)

$\therefore$ rendements marginaux décroissants.

1.2.5 Hypothèses usuelles pour la fonction de production g

H1. g est deux fois continûment dérivable $\rightarrow \quad g \in C^2$

H2. $g_r = \partial g / \partial a_r = \partial b_1 / \partial a_r > 0 \qquad$ pour $r = 2, \ldots, \ell$

H3. g est (strictement) concave :

i.e. $\zeta' \, G \, \zeta \ (<) \ 0 \quad \forall \, \zeta \neq 0$

$\leq 0 \quad \forall \, \zeta$

où $\quad G = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_2^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_2 \partial a_\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_\ell \partial a_2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 g}{\partial a_\ell^2} \end{bmatrix}$ est la matrice hessienne de g

$\Rightarrow \quad g_{rr} = \partial^2 g / \partial a_r^2 \quad = \quad \partial^2 b_1 / \partial a_r^2 \quad \leq 0$

1.3 Étude de la fonction de production : forme générale

1.3.1 Notation

$f(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) = 0$

Exemples

1. $y_1^2 + 5y_2^2 - 4y_3y_4 = 0$
2. $y_1^2 + y_2^2 - 2y_3y_4 = 0$

1.3.2 Représentation graphique d'une fonction de production générale à l'aide d'un exemple

On considère la fonction de production suivante :

$f(y_1, y_2, y_3, y_4) \quad = ay_1^\alpha + by_2^\beta + cy_3^\gamma y_4^\delta = 0$

avec y_1, y_2 outputs

y_3, y_4 inputs

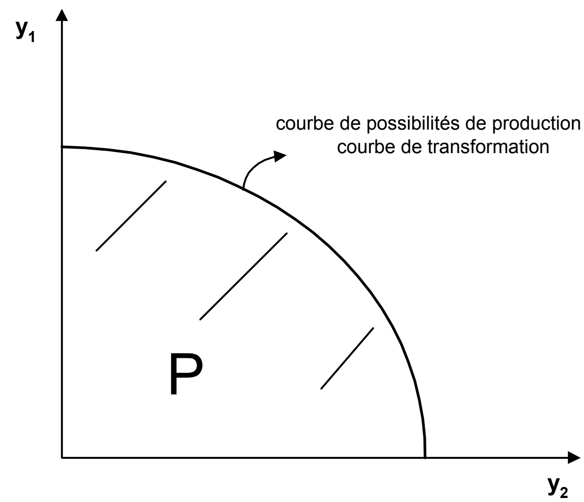
i) posons : $\quad y_3 = \bar{y}_3, \quad y_4 = \bar{y}_4$

$\Rightarrow \quad cy_3^\gamma y_4^\delta = \text{constante}$

$\Rightarrow$ la fonction s'écrit : $\quad ay_1^\alpha + by_2^\beta = \text{cte}$

(**voir graphique 2-06**)

2- 06



(sur le graphique, $\alpha = \beta = 2$; $a = b$)

Ici, P représente l'ensemble des productions possibles à partir des inputs $y_3 = \bar{y}_3$ et $y_4 = \bar{y}_4$.

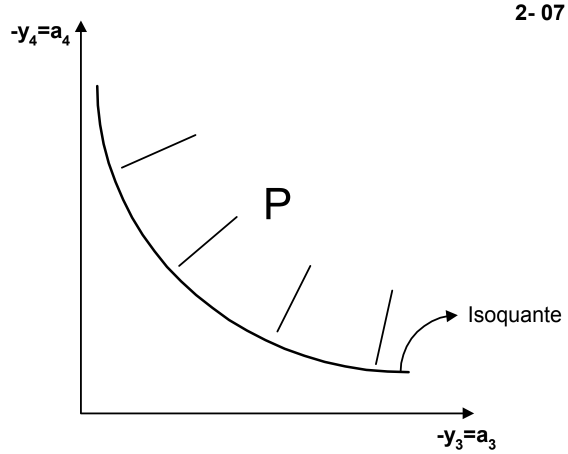
ii) Posons $y_1 = \bar{y}_1$, $y_2 = \bar{y}_2$.

$\Rightarrow$ $ay_1^{\alpha} + by_2^{\beta} = cte$

$\Rightarrow$ la fonction s'écrit : $cy_3^{\gamma}y_4^{\delta} = \text{constante}$

(**voir graphique 2-07**)

2- 07



(sur le graphique, $\gamma = \delta = 1$)

Ici, P représente l'ensemble des vecteurs d'inputs compatibles avec un niveau d'outputs donné (ou permettant d'atteindre un niveau d'outputs donné).

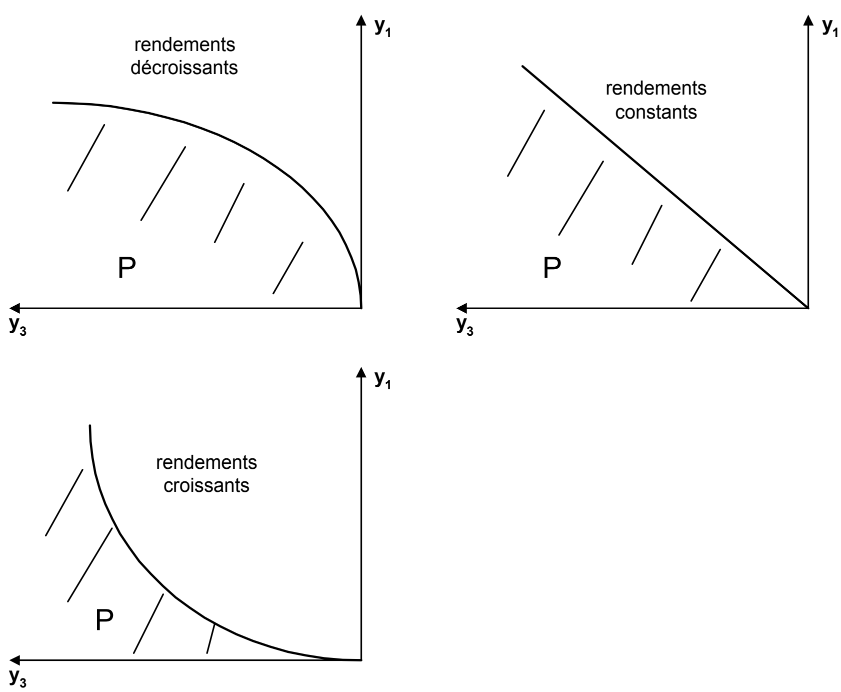
Sur l'isoquante, on retrouve les vecteurs d'inputs techniquement efficaces.

iii) Posons $y_2 = \bar{y}_2$, $y_4 = \bar{y}_4$.

$\Rightarrow$ la fonction s'écrit : $ay_1^{\alpha} + cte = dy_3^{\gamma}$

(**voir graphiques 2-08**)

2- 08



1.3.3 TMT, TMST et Pm

Hypothèses de base : f est deux fois continûment dérivable ($f \in C^2$)

$f_r = \partial f / \partial y_r$ et $f_{r,s} = \partial^2 f / \partial y_r \partial y_s$ existent et sont continues

Considérons la différentielle totale de f :

$$df = f_1 dy_1 + f_2 dy_2 + \ldots + f_\ell dy_\ell$$

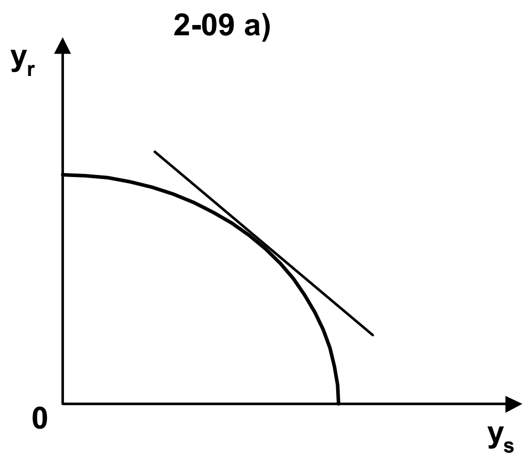
Posons $dy_h = 0$ sauf pour $h = r, s$.

$$\Rightarrow \quad f_r dy_r + f_s dy_s = 0$$

$$\Rightarrow \quad dy_r / dy_s = -f_s / f_r$$

<u>1er cas :</u> r, s sont des outputs

(**voir graphique 2-09a)**)



$dy_r / dy_s = -f_s / f_r$

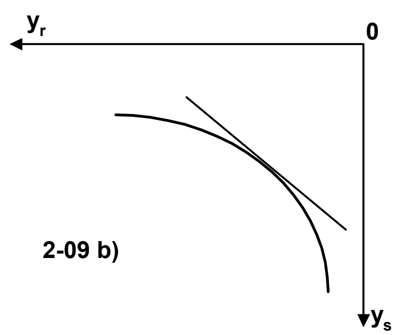
= pente de la courbe de transformation

= TMT

= Taux marginal de transformation

<u>2ème cas</u>: r, s sont des inputs

(**voir graphique 2-09b)**)



$dy_r / dy_s = -f_s / f_r$

= pente de l'isoquante

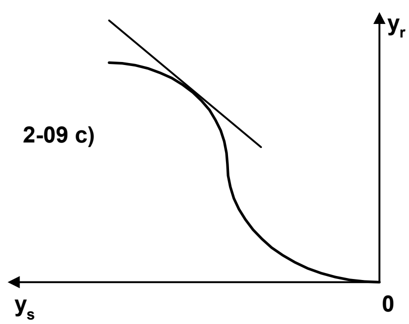
= TMST

= Taux marginal de substitution technique.

$3^{ème}$ cas : r (disons r = 1) est un output, s est un input.

$$(\Rightarrow \quad f(y_1, \ldots, y_\ell) = y_1 - g^*(y_2, \ldots, y_\ell) = 0 \;)$$

(**voir graphique 2-09c)**)



$dy_1 / dy_s = -f_s / f_1 = -f_s$

= pente de la fonction de production

= Pm de l'inputs

1.3.4 Hypothèses usuelles sur la fonction de production f

$$f(y_1, \ldots, y_\ell) = 0$$

H1. f est deux fois continûment dérivable $f \in C^2$

H2. $\partial f / \partial y > 0$, où $\dfrac{\partial f}{\partial y} = \left[\dfrac{\partial f}{\partial y_1}, \dfrac{\partial f}{\partial y_2}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial y_\ell} \right]$

avec $f_h > 0$ pour $h = 1, 2, \ldots, \ell$

H3. f est strictement quasi-convexe

$\zeta' F \zeta > 0$ pour $\zeta \neq 0$

$\zeta' \partial f/\partial y = 0$

où $\quad F = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1^2} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_1 \partial y_\ell} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_\ell \partial y_1} & \cdots & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y_\ell^2} \end{bmatrix}$ est la matrice hessienne de F

2. DÉCISIONS DE L'ENTREPRISE (MAXIMISATION DES PROFITS)

2.1 Équilibre du producteur

Le problème : On suppose que la technologie du producteur est représentable par une fonction de production :

$$f(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = 0$$

où f satisfait aux hypothèses usuelles. Le problème du producteur peut s'écrire :

$$\text{Max} \quad \pi = py = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h$$

$$\text{sujet à } f(y) = 0$$

Ce qui revient à maximiser le lagrangien suivant :

$$\underset{y,\mu}{Max} \quad L = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h - \mu[f(y_1, y_2, \dots, y_\ell)]$$

En résolvant ce problème, on obtient :

1) $$\frac{\partial L}{\partial y_h} = p_h - \mu \frac{\partial f}{\partial y_h} \qquad h = 1, 2, \dots, \ell$$

2) $\partial L / \partial \mu = -f(y_1, y_2, \dots, y_\ell)$

et les dérivées premières s'annulent au point où le vecteur $y = (y_1, y_2, \dots, y_\ell)$ est optimal. Autrement dit, les équations (1) et (2), lorsquelles s'annulent, sont les conditions nécessaires pour avoir un équilibre du producteur.

Interprétation des conditions d'équilibre

1) $p_h - \mu \dfrac{\partial f}{\partial y_h} = 0 \qquad h = 1, 2, \dots, \ell$

2) $-f(y_1, y_2, \dots, y_\ell) = 0$

Une solution $y^o = (y_1^o, y_2^o, \dots, y_\ell^o)$ de ce système d'équations est un équilibre du producteur.

Considérons la condition (1) pour h = r, s. On a :

3) $p_r = \mu f_r$

4) $p_s = \mu f_s$

De (4), on a : $\mu = p_s / f_s$ et, en substituant dans (3), on trouve :

$$p_s / p_r = f_s / f_r$$

3 interprétations possibles :

1er cas : r et s sont des outputs

$f_s / f_r = p_s / p_r \Leftrightarrow$ |TMT| = rapport des prix des outputs

2ème cas : r et s sont des inputs

$f_s / f_r = p_s / p_r \Leftrightarrow$ |TMST| = rapport des prix des inputs

3ème cas : r est un output, s est un input

$f_s = p_s / p_r \quad \Leftrightarrow \quad |Pm|\, p_r = $ prix de l'input s

productivité marginale
de l'input s en valeur

- (**Facultatif**) Existence des fonctions d'offre nette

Le système (1) et (2) est un système de $\ell+1$ équations à $2\ell+1$ variables : $y_1, y_2, \ldots, y_\ell, \mu$, d'une part, et $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$, d'autre part.

Question : Peut-on exprimer les premières variables $(y_1, y_2, \ldots, y_\ell, \mu)$ en fonction des secondes $(p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$?

Par le théorème des fonctions implicites, la réponse est «oui» si la matrice jacobienne du système d'équations (1) et (2) est de rang maximal. Il s'agit donc de vérifier si la matrice suivante

$$\begin{bmatrix} -\mu f_{11} & -\mu f_{12} & \cdots & -\mu f_{1\ell} & -f_1 \\ -\mu f_{21} & -\mu f_{22} & \cdots & -\mu f_{2\ell} & -f_2 \\ \vdots & & & & \vdots \\ -\mu f_{\ell 1} & -\mu f_{\ell 2} & \cdots & -\mu f_{\ell\ell} & -f_\ell \\ -f_1 & -f_2 & \cdots & -f_\ell & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\mu F & -f_y \\ -f_y' & 0 \end{bmatrix}$$

(évaluée en $b^o = (y_1^o, y_2^o, \ldots, y_\ell^o, \mu^o, p_1^o, p_2^o, \ldots, p_\ell^o)$)

est de rang maximal. Si c'est le cas, on peut alors affirmer l'existence des fonctions d'offre nette et écrire :

$y_h = s_h(p_1, p_2, \ldots, p_\ell) \qquad h = 1, 2, \ldots, \ell \qquad$ fonctions d'offre nette

$\mu = \mu^*(p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$

De plus, ces fonctions sont continues dans un voisinage de $(p_1^o, p_2^o, \ldots p_\ell^o)$

2.2 Étude du comportement du producteur autour de l'équilibre

Soit $y = s(p)$ le système d'offre nette.

Considérons la différentielle totale de ce système. On a sous forme vectorielle (matricielle) :

$$dy = \left[\frac{\partial y}{\partial p} \right] dp = Ydp$$

où $Y = \left[\frac{\partial y}{\partial p} \right]$ est la matrice des effets-prix. Étudier le comportement du producteur autour de l'équilibre revient à étudier les propriétés de cette matrice d'effets-prix.

- **(Facultatif)** <u>L'équation fondamentale du producteur</u>

On considère les conditions d'équilibre (CPO) du problème du producteur

1) $p_h - \mu\, \partial f/\partial y_h = 0 \qquad h = 1, 2, \ldots, \ell$

2) $-f(y_1, y_2, \ldots, y_\ell) = 0$

Cela donne un système de $\ell + 1$ équations que l'on dérive par rapport à $p_1, p_2, \ldots, p_\ell$. On obtient alors, sous forme condensée, l'équation matricielle

$$\begin{bmatrix} \mu F & f_y \\ f_y' & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y \\ \partial\mu / \partial p \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_\ell \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \text{équation fondamentale du producteur}$$

où F est la matrice hessienne de f et $Y = \left[\frac{\partial y}{\partial p} \right]$ la matrice des effets-prix.

En utilisant l'équation fondamentale du producteur, on peut facilement prouver les propriétés des fonctions d'offre nette, ces propriétés se traduisant par des caractéristiques bien précises que la matrice des effets-prix, $Y = \left[\frac{\partial y}{\partial p} \right]$, doit respecter.

- <u>Les fonctions d'offre nette et leurs propriétés</u>

On considère la différentielle totale des fonctions d'offre nette,

$$dy = \left[\frac{\partial y}{\partial p} \right] dp \; = \; Ydp$$

La matrice Y est caractérisée par les propriétés suivantes :

i) $Y \equiv Y'$ (symétrie) $\Rightarrow$ les effets-prix croisés sont égaux ;

ii) $Yp \equiv 0$ (homogénéité) $\Rightarrow$ les fonctions d'offre nette sont homogènes de degré zéro dans les prix ;

iii) $\zeta' \, Y \, \zeta > 0$ pour $\zeta \neq \theta p$ les fonctions d'offre nette ont une pente positive.

<u>Exemple 1</u>

Soit la fonction de production $f(y_1, y_2, y_3) = y_1 - 2 y_2^{1/3} y_3^{1/3} = 0$ où y_1 est un output dont le prix est p_1 et y_2, y_3 des inputs dont les prix sont p_2 et p_3.

Cette fonction peut aussi s'écrire $y_1 = 2 a_2^{1/3} a_3^{1/3}$ ($a_2 = -y_2$, $a_3 = -y_3$) et on peut facilement vérifier que ses rendements à l'échelle sont décroissants :

$$\begin{aligned} y_1 \quad = \quad & g(a_2, a_3) && = 2 a_2^{1/3} a_3^{1/3} \\ \Rightarrow \quad & g(ta_2, ta_3) && = 2(ta_2)^{1/3} \, (ta_3)^{1/3} \\ &&& = t^{2/3} \; 2 a_2^{1/3} a_3^{1/3} \\ &&& = t^{2/3} \; g(a_2, a_3) \end{aligned}$$

y_1 est homogène de degré $2/3 < 1$ $\Leftrightarrow$ rendement à l'échelle décroissants.

Le problème du producteur est de maximiser $p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3$ sous la contrainte $y_1 - 2y_2^{1/3}y_3^{1/3} = 0$.

Ce qui revient à maximiser le lagrangien :

$$\underset{y_1,y_2,y_3,\mu}{Max} \quad L : p_1y_1 + p_2y_2 + p_3y_3 - \mu(y_1 - 2y_2^{1/3}y_3^{1/3})$$

Les conditions nécessaires et suffisantes[1] pour avoir un maximum sont :

1) $$\frac{\partial L}{\partial y_1} = p_1 - \mu = 0$$

2) $$\frac{\partial L}{\partial y_2} = p_2 + \frac{2}{3}\mu y_2^{-2/3} y_3^{1/3} = 0$$

3) $$\frac{\partial L}{\partial y_3} = p_3 + \frac{2}{3}\mu y_2^{1/3} y_3^{-2/3} = 0$$

4) $$\frac{\partial L}{\partial \mu} = y_1 - 2y_2^{1/3} y_3^{1/3} = 0$$

de (2) et (3), on obtient : $p_2 / p_3 = y_3 / y_2 \quad \Rightarrow \quad y_2 = (p_3 / p_2)\, y_3$ (5)

remplaçons dans (3) :

$$p_3 = -\frac{2}{3}p_1\left(\frac{p_3}{p_2}y_3\right)^{1/3} y_3^{-2/3}$$

$$\Leftrightarrow = -\frac{2}{3}p_1\left(\frac{p_3^{1/3}}{p_2^{1/3}}\right)\frac{1}{y_3^{1/3}}$$

$$\Leftrightarrow \quad y_3^* = -\frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_3^2 p_2}$$

[1] Les conditions nécessaires deviennent suffisantes en autant que les hypothèses usuelles sur la fonction de production soient respectées.

et de (5) $$y_2^* = -\frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_2^2 p_3}$$

Si on substitue y_2^* et y_3^* dans (4), on obtient :

$$y_1^* = 2\left(\frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_2^2 p_3}\right)^{1/3}\left(\frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_3^2 p_2}\right)^{1/3} = \frac{8}{9}\frac{p_1^2}{p_2 p_3}$$

y_1^*, y_2^* et y_3^* sont les fonctions d'offre nette à partir desquelles on peut construire la matrice des effets-prix Y.

Il suffit de dériver chacune des fonctions d'offre nette par rapport à p_1, p_2 et p_3. Ce faisant, on obtient :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{16}{9}\frac{p_1}{p_2 p_3} & -\frac{8}{9}\frac{p_1^2}{p_2^2 p_3} & -\frac{8}{9}\frac{p_1^2}{p_2 p_3^2} \\ -\frac{8}{9}\frac{p_1^2}{p_2^2 p_3} & \frac{16}{27}\frac{p_1^3}{p_2^3 p_3} & \frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_2^2 p_3^2} \\ -\frac{8}{9}\frac{p_1^2}{p_2 p_3^2} & \frac{8}{27}\frac{p_1^3}{p_2^2 p_3^2} & \frac{16}{27}\frac{p_1^3}{p_2 p_3^3} \end{bmatrix}$$

Il est facile de vérifier les propriétés de cette matrice :

1) $Y \equiv Y'$: évident, puisque la matrice est symétrique ;

2) $Yp \equiv 0$: il suffit de multiplier Y avec $\begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{bmatrix}$;

3) $\zeta' Y \zeta > 0$ pour $\zeta \neq \theta p$: les fonctions d'offre nette ont une pente positive puisque tous les éléments de la diagonale sont positifs.

2.3 La fonction de profit et ses propriétés

Définition : Soit $y_h(p) = s_h(p_1, \ldots, p_\ell)$ la fonction d'offre nette du bien h. La fonction de profit est donnée par :

$$\pi(p) = \sum_{h=1}^{\ell} p_h y_h(p)$$

$$= p_1 s_1(p_1, \ldots, p_\ell) + p_2 s_2(.) + \ldots + p_\ell s_\ell(.)$$

À chaque niveau de prix p, la fonction de profit indique le profit maximum.

Propriétés

i) $\pi(.)$ est non décroissante en p_h si h est un output ;
non croissante en p_h si h est un input ;

ii) $\pi(.)$ est homogène de degré 1 en p, i.e. $\pi(tp_1, \ldots, tp_\ell) = t\pi(p_1, \ldots, p_\ell)$

iii) $\pi(.)$ est convexe en p,

i.e. $\pi_{hh} > 0$, $h = 1, 2, \ldots, \ell$; $\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} \\ \pi_{21} & \pi_{22} \end{bmatrix} \geq 0$ $\begin{bmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \pi_{13} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \pi_{23} \\ \pi_{31} & \pi_{32} & \pi_{33} \end{bmatrix} \geq 0, \ldots$

par exemple, pour $\pi(p_1, p_2)$, on a : $\pi_{11} \geq 0$, $\pi_{22} \geq 0$

$\pi_{11}\pi_{22} - \pi_{12}^2 \geq 0$

Lemme d'Hotelling

Soit $y_h = s_h(p_1, p_2, \ldots, p_\ell)$ la fonction d'offre nette du bien h. Alors

$$y_h = s_h(p_1, p_2, \ldots, p_\ell) = \frac{\partial \pi(p_1, \ldots, p_\ell)}{\partial p_h} \qquad h = 1, 2, \ldots, \ell$$

Remarques :

$\partial\pi / \partial p_h = b_h(.)$ si h est un outpout

$\partial\pi / \partial p_h = -a_h(.)$ si h est un input

Retour sur les propriétés des fonctions d'offre nette

a) $\partial y_h / \partial p_h \geq 0$ $h = 1, 2, \ldots, \ell$

b) $\partial y_r / \partial p_s = \partial y_s / \partial p_r$ $r, s = 1, 2, \ldots, \ell$ $\Rightarrow$ quelle que soit la technologie

2.4 Un cas particulier : un output avec un seul input

Présentation du problème

données, paramètres, variables exogènes	$p_1, p_2, b_1 = g(a_2)$
variables de décision	b_1, a_2
critère	$\max \pi$
expression de la solution : fonctions de comportement ou fonction de réaction de l'entreprise à (p_1, p_2)	$a_2^* = a_2(p_1, p_2)$ $b_1^* = b_1(p_1, p_2)$

Hypothèses

i) l'entreprise cherche à maximiser π ;

ii) l'entreprise est «price-taker» p_1, p_2 donnés, $p_1, p_2 > 0$;

iii) les contraintes techniques peuvent s'exprimer : $b_1 = g(a_2)$;

iv) g satisfait aux hypothèses usuelles :

1° $g \in C^2$

2° $\partial g/\partial a_2 = g_2 > 0$

3° $\zeta' G \zeta < 0 \quad \forall \zeta \neq 0$

Le problème

$$\underset{b_1, a_2}{Max} \; \pi = p_1 b_1 - p_2 a_2 \qquad \text{s.c.} \quad b_1 = g(a_2)$$

1) $\pi = p_1 g(a_2) - p_2 a_2$

2) $\underset{a_2}{Max} \; p_1 g(a_2) - p_2 a_2 \quad \Rightarrow \quad \partial[p_1 g(a_2) - p_2 a_2] / \partial a_2 = 0$

3) $p_1 g_2(a_2^*) - p_2 = 0$

4) $p_1 g_{22}(a_2^*) < 0$

$\Rightarrow$ Conditions nécessaires et suffisantes.

De (3), on a : $a_2^* = a_2(p_1, p_2)$ fonction de demande

Or, $b_1 = g(a_2) \quad \Rightarrow \quad b_1^* = b_1(p_1, p_2)$ fonction d'offre

Interprétation des conditions d'équilibre

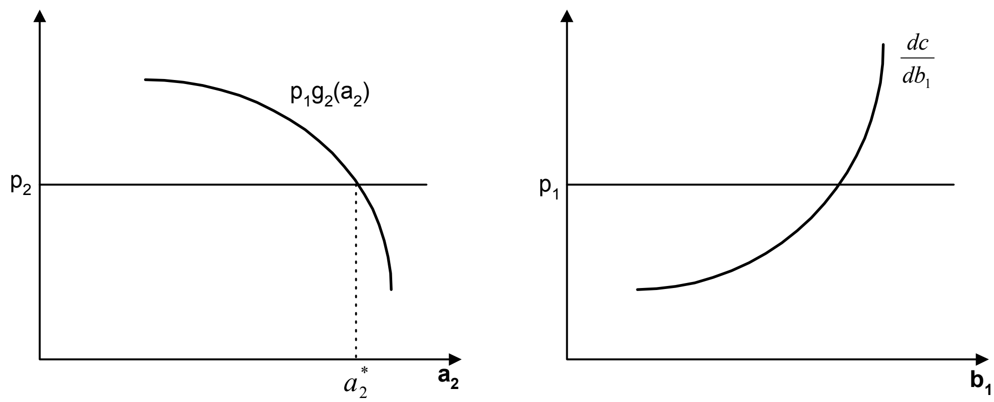
Réécrivons (3) de la façon suivante :

(3') $\underbrace{p_1 g_2(a_2^*)}_{\text{Valeur de la productivité marginale d'un travailleur additionnel}} = \underbrace{p_2}_{\text{coût marginal d'un travailleur additionnel}}$

(3'') $\underbrace{p_1}_{\text{Recette marginale de l'entreprise}} = \underbrace{p_2/g_2 = dc/db_1}_{\text{Coût marginal}}$

(**voir graphique 2-10**)

2-10



Statistique comparative

On considère la différentielle totale de (3) :

(5) $g_2(a_2^*)\, dp_1 \quad + \quad p_1 g_{22}(a_2^*)\, da_2 \; - \quad dp_2 \quad = \; 0$

Posons $dp_1 = 0$. L'équation (5) peut s'écrire sous la forme

(6) $\partial a_2/\partial p_2 = 1/p_1 g_{22}(a_2^*) < 0$

pente de la demande d'input

Posons $dp_2 = 0$. L'équation (5) devient :

(7) $\partial a_2/\partial p_1 = -[g_2(a_2^*)/p_1 g_{22}(a_2^*)] > 0$

effet de Δp_1 sur la demande d'input.

Puisque $b_1^* = g(a_2^*)$, on a : $\dfrac{\partial b_1^*}{\partial p_1} = \dfrac{\partial b_1^*}{\partial a_2^*}\dfrac{\partial a_2^*}{\partial p_1}$

$$\frac{\partial b_1^*}{\partial p_2} = \frac{\partial b_1^*}{\partial a_2^*}\frac{\partial a_2^*}{\partial p_2}$$

Ainsi,

(8) $$\frac{\partial b_1}{\partial p_1} = g_2\left(a_2^*\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial p_1}\right) > 0$$

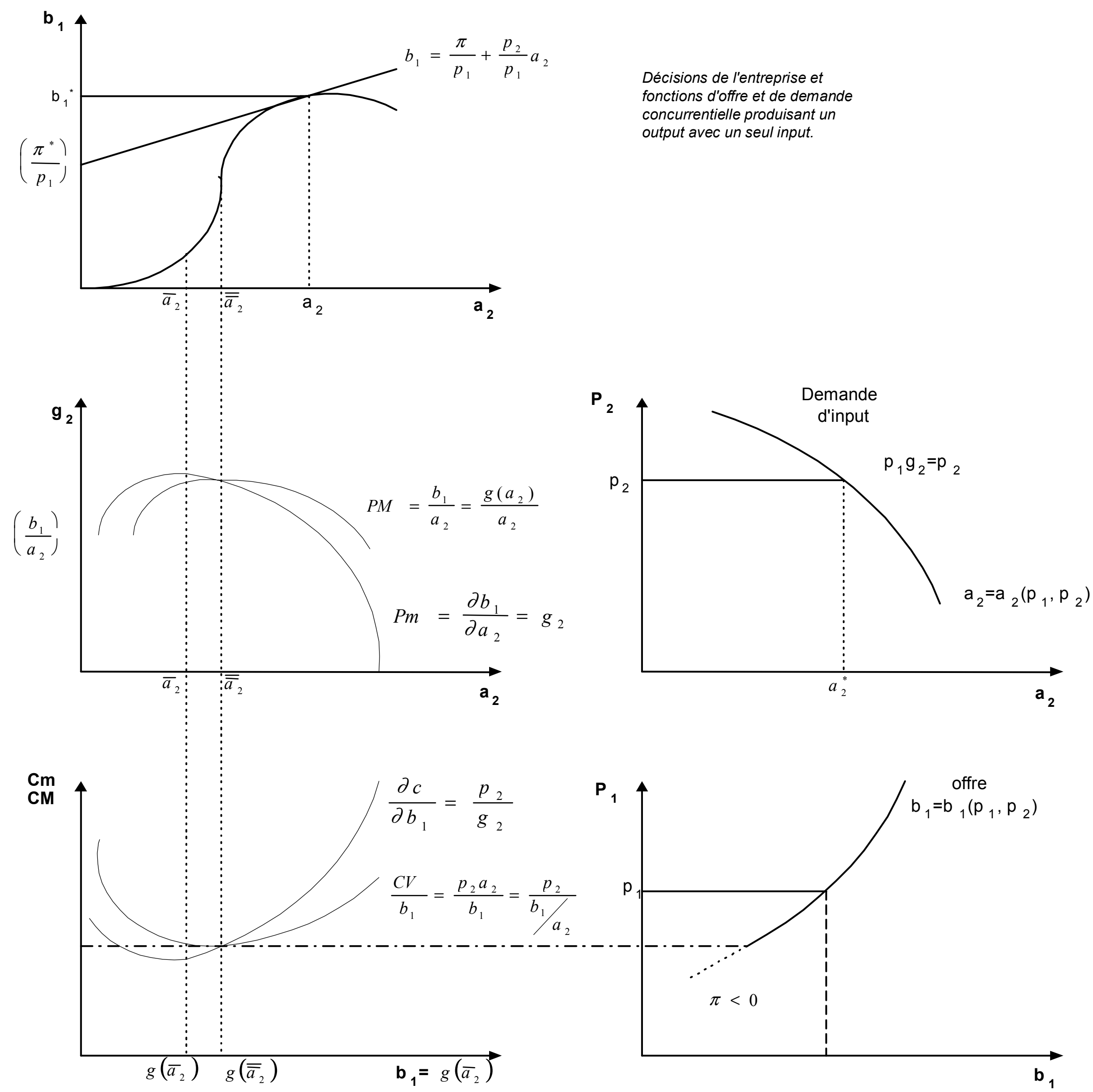
pente de la fonction d'offre.

(9) $$\frac{\partial b_1}{\partial p_2} = g_2\left(a_2^*\right)\left(\frac{\partial a_2}{\partial p_2}\right) < 0$$

effet de Δp_2 sur l'offre.

(voir graphique 2-11)

2-11



Résumé

Une entreprise qui maximise $\pi = p_1b_1 - p_2a_2$ sous réserve que $b_1 = g(a_2)$, choisit le niveau d'output optimal sur sa fonction d'offre $b_1^* = b_1^*(p_1, p_2)$ qui a des dérivées $(\partial b_1/\partial p_1) \geq 0$ et $(\partial b_1/\partial p_2) \leq 0$ et pour laquelle $p_1 = dc/db_1 \quad \forall \; p_1 \geq \text{Min } c/b_1$. Le niveau optimal d'input est donné par la fonction de demande $a_2^* = a_2^*(p_1, p_2)$ qui a des dérivées partielles $(\partial a_2/\partial p_1) \geq 0$ et $(\partial a_2/\partial p_2) \leq 0$ et pour laquelle $p_2 = p_1g_2$.

Exemple 2

Production d'un output avec un seul input

La technologie du producteur est donné par la fonction de production :

$b_1 = \alpha - \beta a_2^{-1}$ et p_1 et p_2 sont les prix de b_1 et a_2.

$(\alpha, \beta > 0)$

On a : $\quad db_1/da_2 = \beta a_2^{-2} > 0$

et $d^2b_1/da_2^2 = -2\beta a_2^{-3} < 0$

donc la fonction de production respecte les hypothèses usuelles.

Le profit : $\quad \pi = p_1b_1 - p_2a_2$

$$\Rightarrow \quad \pi = p_1(\alpha - \beta a_2^{-1}) - p_2a_2$$

$$= p_1\alpha - p_1\beta a_2^{-1} - p_2a_2$$

$$\underset{a_2}{Max}\ \pi \quad \Rightarrow \quad \partial\pi/\partial a_2 = p_1\beta a_2^{-2} - p_2 = 0$$

d'où $\quad a_2^* = p_1^{1/2}\beta^{1/2}p_2^{-1/2} = a_2^*(p_1, p_2)$

On peut alors facilement trouver la fonction d'offre nette

$b_1^* = b_1^*(p_1, p_2) \quad = \alpha - \beta(a_2^*)^{-1}$

$$= \alpha - \beta(p_1^{½}\beta^{½}p_2^{-½})^{-1}$$
$$= \alpha - p_2^{½}p_1^{-½}\beta^{½}$$

On a donc : $a_2^* = a_2^*(p_1, p_2) = p_1^{½}\beta^{½}p_2^{-½}$

$b_1^* = \alpha - p_2^{½}p_1^{-½}\beta^{½}$

Alors :

$\partial a_2^*/\partial p_2 = -½\, p_1^{½}\beta^{½}p_2^{-3/2} < 0 \Rightarrow$ La fonction de demande de l'input a une pente négative.

$\partial a_2^*/\partial p_1 = ½\, p_1^{-½}\beta^{½}p_2^{-½} > 0 \Rightarrow$ L'augmentation du prix de l'output entraîne une augmentation de la demande en input

$\partial b_1^*/\partial p_1 = ½\, \beta^{½}p_1^{-3/2}p_2^{½} > 0 \Rightarrow$ la fonction d'offre de l'output a une pente positive.

$\partial b_1^*/\partial p_2 = -½\, \beta^{½}p_1^{-½}p_2^{-½} < 0 \Rightarrow$ l'augmentation du prix de l'input entraîne la diminution de l'offre d'output.

3. <u>FONCTION DE COÛT</u>

3.1 <u>Définition</u>

Relation qui, à chaque niveau de production, associe la valeur minimum des inputs permettant cette production.

Remarques :

1) On peut élaborer la théorie de l'entreprise à partir de la fonction de coût (en général, c'est plus simple !). Mais il y a des inconvénients à procéder de cette manière :

   a) la relation entre valeur des inputs et quantité produite dépend des prix p_h des divers inputs ; ainsi, lorsque les prix p_h des inputs changent, la fonction de coût se modifie.

Autrement dit, la fonction de production semble être une notion plus fondamentale qui décrit les contraintes techniques quels que soient les prix.

b) une théorie de l'entreprise basée sur les fonctions de coût s'insère mal dans une théorie de l'équilibre général qui traite les prix endogènes plutôt que donnés à priori.

2) On considère une fonction de production du type :

$b_1 = g(a_2, a_2, \ldots , a_\ell)$

et on considère que les marchés des inputs sont concurrentiels, i.e. les p_h ($h = 2, 3, \ldots , \ell$) sont donnés à l'entreprise.

3) Le coût est donné par :

$$C = \sum_{h=2}^{\ell} p_h a_h$$

3.2 Équilibre de l'entreprise en 2 étapes

Présentation du problème (2 étapes)

Étape 1 : On cherche la fonction de coût, i.e. pour chaque niveau de production $\overline{b}_1$, on détermine la combinaison (vecteur) d'inputs $a_2, a_3, \ldots , a_\ell$ qui minimise le coût. Ceci nous permet de calculer C pour chaque $\overline{b}_1$. On obtient alors la fonction de coût $C(b_1)$.

Étape 2 : On choisit b_1 de manière à maximiser le profit $\pi = p_1 b_1 - C(b_1)$.

Illustration à l'aide d'un cas particulier

On considère un output b_1 à partir de deux inputs a_2 et a_3

Décomposition

Minimiser le coût total pour chaque valeur de b_1

↓

ceci revient à chercher l'allocation optimale des inputs pour un certain niveau de production :

VAR EXO : (p_2, p_3) et b_1

VAR ENDO : a_2, a_3

Solutions $a_2^* = a_2(p_2, p_3, b_1)$
$a_3^* = a_3(p_2, p_3, b_1)$ fonctions de demande conditionnelle

$$\Rightarrow C = p_2a_2^* + p_3a_3^*$$
$$= p_2a_2(.) + p_3a_3(.)$$
$$= C(p_2, p_3, b_1)$$

choisir b_1^* qui maximise le profit

$\pi = p_1b_1 - C(b_1)$

VAR EXO : p_1, p_2, p_3

VAR ENDO : b_1

Solutions : $b_1 = s_1(p_1, p_2, p_3)$
fonction d'offre

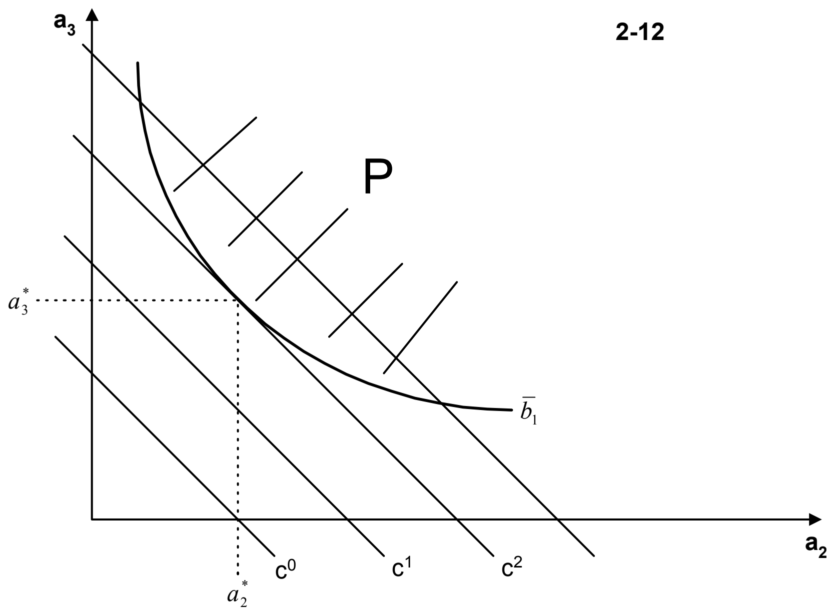
Illustration graphique

$$\underset{a_2,\, a_3}{\text{Minimiser}} \quad (p_2a_2 + p_3a_3 : (\bar{b}_1, a_2, a_3) \in P)$$

$$C = p_2a_2 + p_3a_3$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = C/p_3 - \underbrace{(p_2/p_3)}_{\text{pente de l'isocoût}} a_2$$

droite de l'isocoût (**voir graphique 2-12**)



ici, la combinaison d'inputs qui minimise le coût est (a_2^*, a_3^*)

$\Rightarrow \quad C = p_2a_2^* + p_3a_3^* \quad = C^2$

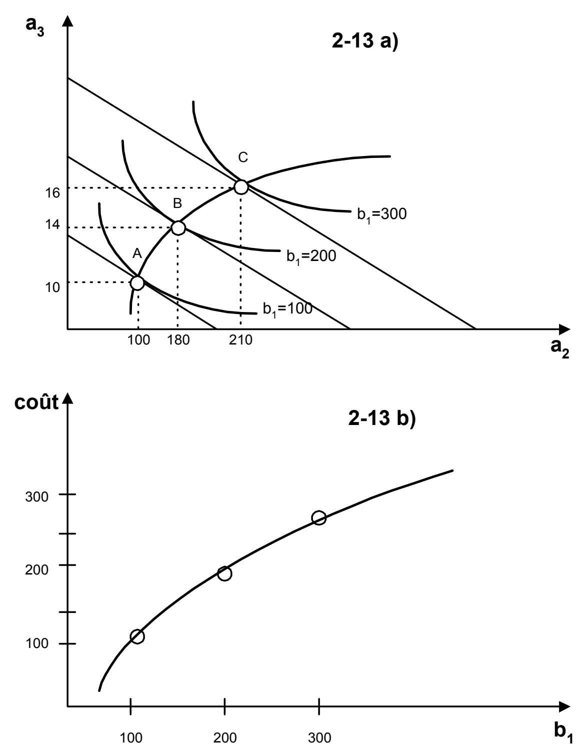
$p_2 = 1, \quad p_3 = 2$

$C(A) = C(b_1 = 100) = 120$

$C(B) = C(b_1 = 200) = 208$

$C(C) = C(b_1 = 300) = 242$

(**voir graphiques 2-13 a) et b)**)



<u>Dérivation de la fonction de coût (min. des coûts)</u>

Problème : pour un niveau donné d'output, on doit chercher la combinaison d'inputs qui permet de produire cette quantité d'output au moindre coût.

$$\text{Min} \quad C = \sum_{h=2}^{\ell} p_h a_h$$

s.c. $b_1 = g(a_2, \ldots, a_\ell)$ | $\bar{b}_1 = g(a_2, \ldots, a_\ell)$ ou $(\bar{b}_1, a_2, \ldots, a_\ell) \in P$

$b_1 = \bar{b}_1$

Exemple : Min $C = p_2a_2 + p_3a_3$

s.c. $\bar{b}_1 = g(a_2, a_3)$ [ou s.c. $(\bar{b}_1, a_2, a_3) \in P$]

- Variables exogènes : $p_2, p_3, \bar{b}_1$
- Variables endogènes : a_2 et a_3

Formalisation (cas particulier)

Le problème revient à minimiser le lagrangien suivant :

$$\text{Min} \quad L = a_2p_2 + a_3p_3 + \theta[\bar{b}_1 - g(a_2, a_3)]$$

En résolvant, on trouve :

$$\left.\begin{array}{ll}
(1) & \dfrac{\partial L}{\partial a_2} = p_2 - \theta g_2 = 0 \\[2ex]
(2) & \dfrac{\partial L}{\partial a_3} = p_3 - \theta g_3 = 0 \\[2ex]
(3) & \dfrac{\partial L}{\partial \theta} = \bar{b}_1 - g(a_2, a_3) = 0
\end{array}\right| \text{conditions de premier ordre}$$

De (1) et (2), on a :

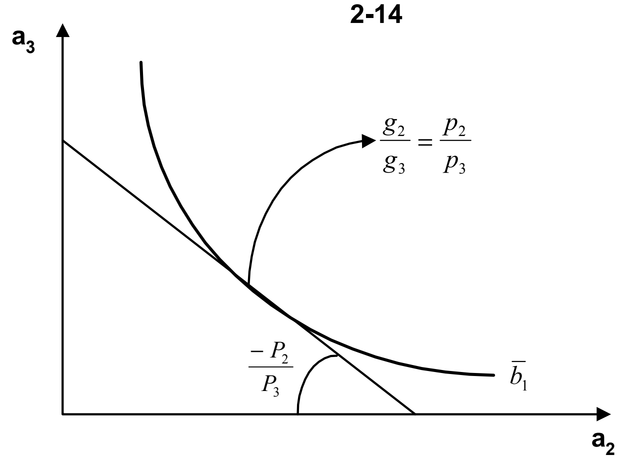
$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{g_2}{g_3} \qquad \left(= -\frac{da_3}{da_2}\right)$$

rapport des prix des inputs, pente de l'isocoût

TMST, pente de l'isoquante

(**voir graphique 2-14**)

2-14



À partir des conditions de 1er ordre, on peut trouver les fonctions de demande conditionnelle.

$$a_2^* = a_2(p_2, p_3, b_1)$$

$$a_3^* = a_3(p_2, p_3, b_1)$$

et $\quad \theta^* = \theta\,(p_2, p_3, b_1)$

En substituant les fonctions de demande conditionnelle dans la définition du coût, on trouve la fonction de coût :

$$\begin{aligned} C &= p_2a_2^* + p_3a_3^* \\ &= p_2a_2(.) + p_3a_3(.) \\ &= C\,(p_2, p_3, b_1) \end{aligned}$$

<u>Remarques</u> :

1. La minimisation des coûts

$$\Rightarrow \quad \frac{p_2}{p_3} = \frac{g_2}{g_3}$$

$\not\Rightarrow$ $p_1 g_h = p_h$ $h = 2, 3$

car $\bar{b}_1$ n'est pas nécessairement le niveau optimal d'output.

2. Les fonctions de demande conditionnelle satisfont les propriétés suivantes :

i) $\partial a_2/\partial p_3 = \partial a_3/\partial p_2$

ii) les fonctions $a_2(.)$ et $a_3(.)$ sont homogènes de degré 0 en p_2 et p_3.

iii) $\partial a_h/\partial p_h < 0$ $h = 2, 3$

3. Signification de θ^* :

1° $C = p_2a_2 + p_3a_3$

$\Rightarrow$ $dC = p_2da_2 + p_3da_3 + a_2dp_2 + a_3dp_3$

$= p_2da_2 + p_3da_3$ si $dp_2 = dp_3 = 0$

2° $b_1 = g(a_2, a_3)$

$\Rightarrow$ $db_1 = g_2da_2 + g_3da_3$

3° $$\frac{dC}{db_1} = \frac{p_2da_2 + p_3da_3}{g_2da_2 + g_3da_3}$$

$$\frac{dC}{db_1} = \frac{\theta^* g_2da_2 + \theta^* g_3da_3}{g_2da_2 + g_3da_3}$$

$= \theta^*$

Ainsi, θ^* représente le coût marginal à l'équilibre du producteur.

Dérivation de l'offre (maximisation des profits)

On cherche b_1 qui maximise le profit :

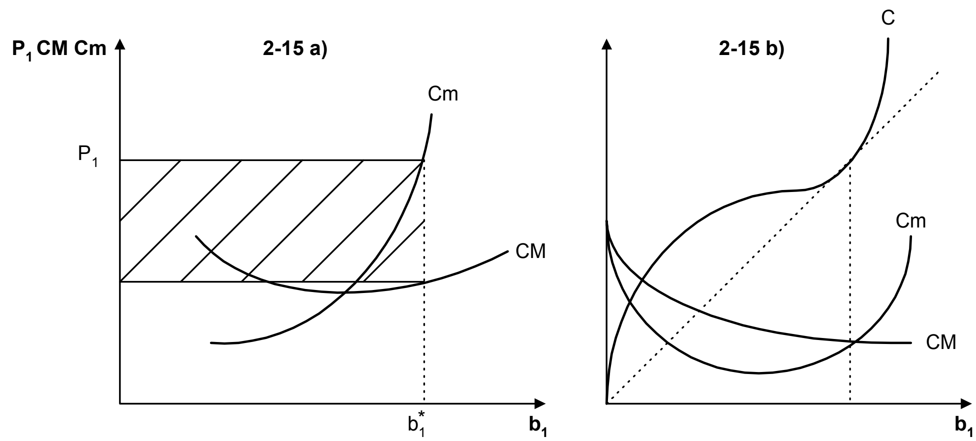
$\pi = p_1b_1 - C(b_1)$

(1) $$\frac{\partial \pi}{\partial b_1} = p_1 - \frac{dC}{db_1} = 0$$ (prix = Cm)

(2) $\dfrac{\partial \pi^2}{\partial b_1^2} = -\dfrac{dC^2}{db_1^2} \leq 0$ ou $\dfrac{dC^2}{db_1^2} \geq 0$ (Cm croissant ou constant)

La condition de 1er ordre nous permet de trouver la fonction d'offre : $b_1 = s(p_1, p_2, p_3)$.

Analyse graphique : (**voir graphique 2-15 a) et b)**)



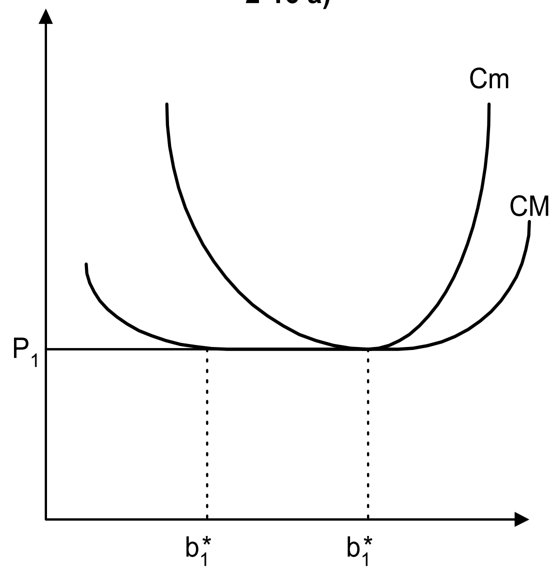
Question :

Les conditions nécessaires sont-elles suffisantes pour assurer l'existence d'un équilibre ?

1er cas : L'équilibre n'est pas unique

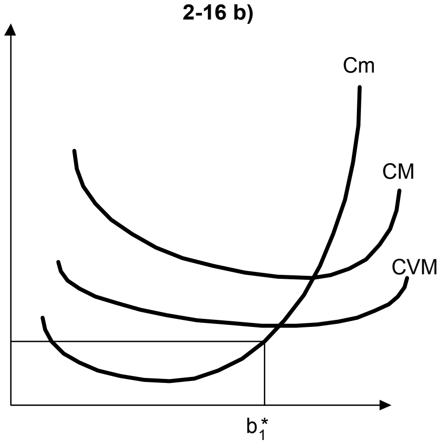
a) il existe deux points tels que p_1 = Cm ; cependant, le deuxième cas est rejeté par la condition de 2ème ordre.
b) il existe plusieurs points tels que p_1 = Cm (**voir graphique 2-16 a)**)

2-16 a)

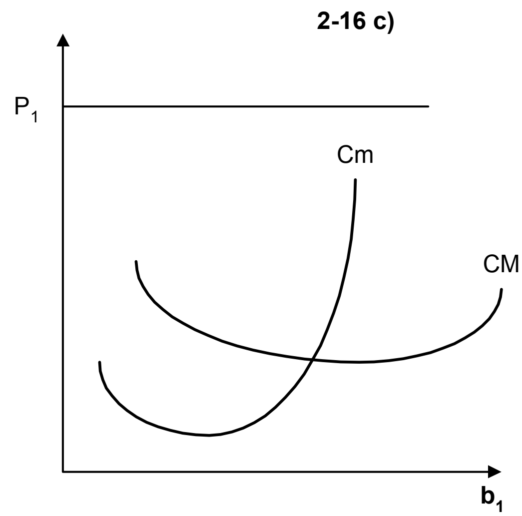


2^{ème} cas : p_1 < Min CVM (**voir graphique 2-16 b)**)

2-16 b)



3ème cas : (**voir graphique 2-16 c)**)



Remarque :

La minimisation des coûts peut être vue comme une étape dans la maximisation du profit. Mais si on abandonne le contexte de la stricte concurrence, elle peut aussi décrire le comportement d'une entreprise qui doit satisfaire une contrainte de production ou d'output $b_1 = \bar{b}_1$ fixée de façon exogène.

3.3 Décisions de courte période vs décisions de longue période

Décisions de longue période

Ces décisions portent sur toute l'organisation de la production (i.e. tous les inputs, y compris la taille de l'équipement). Elle concerne donc le choix de l'équipement et des procédés de fabrication. Dans ce cas, l'analyse précédente (en 2 étapes) s'applique telle quelle.

Décisions de courte période

L'entreprise ne choisit pas tous ses inputs car certains d'entre eux sont prédéterminés. Dans ce cas, le problème revient à étudier les conditions d'emploi d'une capacité de production déjà installée.

Dérivation de la fonction de coût de courte durée

Problème : pour un niveau donné d'output et un niveau donné d'équipement, on doit chercher la combinaison (vecteur) d'inputs qui permet de produire cette quantité d'output au moindre coût tout en utilisant la capacité de production donnée.

Posons $a_\ell = \overline{a}_\ell$. Le problème revient à :

$$\text{Min} \quad C_{CT} = \sum_{h=2}^{\ell} p_h a_h$$

$$\text{s.c.} \quad \left.\begin{array}{l} b_1 = g_1(a_2, \ldots, a_\ell) \\ b = \overline{b}_1 \\ a_\ell = \overline{a}_\ell \end{array}\right| \quad \overline{b_1} = g(a_2, \ldots, a_{\ell-1}, \overline{a}_\ell)$$

Exemple :

$$\text{Min} \quad C_{CT} = p_2a_2 + p_3\overline{a}_3$$

$$\text{s.c.} \quad \overline{b}_1 = g(a_2, \overline{a}_3)$$

Variables exogènes : p_2, p_3, $\overline{b}_1$ et $\overline{a}_3$

Variables endogènes : a_2

La solution nous donne a_2^* et on trouve

$$C_{CT} = p_2a_2^* + p_3\overline{a}_3$$

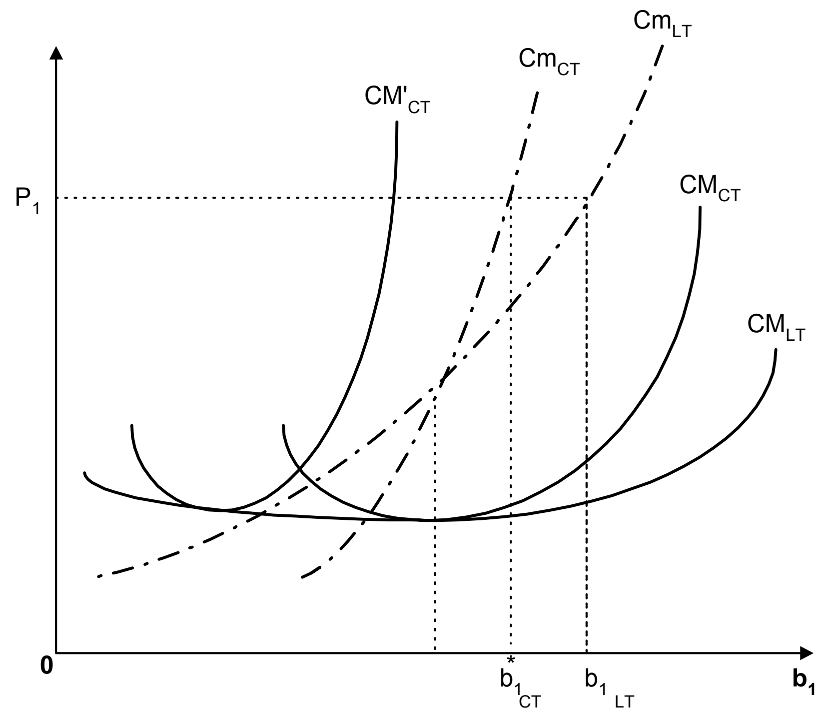
$$\Rightarrow C_{CT}(p_2, p_3, \overline{b}_1, \overline{a}_3)$$

Analyse graphique courte période : Cm_{CT} ; CM_{CT}

longue période : Cm_{LT} ; CM_{LT}

(**voir graphique 2-17**)

2-17



3.4 Propriétés de la fonction de coût

Soit $C(b_1, p_2, p_3, \ldots, p_\ell)$ la fonction de coût.

$$C(b_1, p_2, p_3, \ldots, p_\ell) = p_2a_2^* + \ldots + p_\ell a_\ell^*$$

$$= p_2a_2(b_1, p_2, \ldots, p_\ell) + \ldots + p_\ell a_\ell(.)$$

Cette fonction nous donne le coût minimum pour produire b_1 aux prix $p_2, p_3, \ldots, p_\ell$.

Propriétés

i) $C(.)$ est non décroissante en $(b_1, p_2, \ldots, p_\ell)$

ii) $C(.)$ est homogène de degré 1 en $(p_2, \ldots, p_\ell)$, i.e. $C(tp_2, \ldots, tp_\ell\, ; b_1) = tC(p_2, \ldots, p_\ell\, ; b_1)$.

iii) $C(.)$ est concave en $(p_2, \ldots, p_\ell)$

$$C_{hh} \leq 0, \qquad h = 2, \ldots, \ell \; ; \quad \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} \\ c_{32} & c_{33} \end{vmatrix} \geq 0 \; ; \qquad \begin{vmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{vmatrix} \leq 0 \; ; \ldots$$

Lemme de Shephard

Soit $a_r^* = a_r(p_2, \ldots, p_\ell ; b_1)$ la fonction de demande conditionnelle du facteur r. Alors

$$a_r^* = a_r(p_2, \ldots, p_\ell ; b_1) = \frac{\partial C\left(p_2, \ldots, p_\ell ; b_1\right)}{\partial p_r} \qquad \text{pour } r = 2, 3, \ldots, \ell.$$

Retour sur les propriétés des fonctions de demande conditionnelles

a) $\partial a_h / \partial p_h \leq 0$ $\quad h = 2, 3, \ldots, \ell$

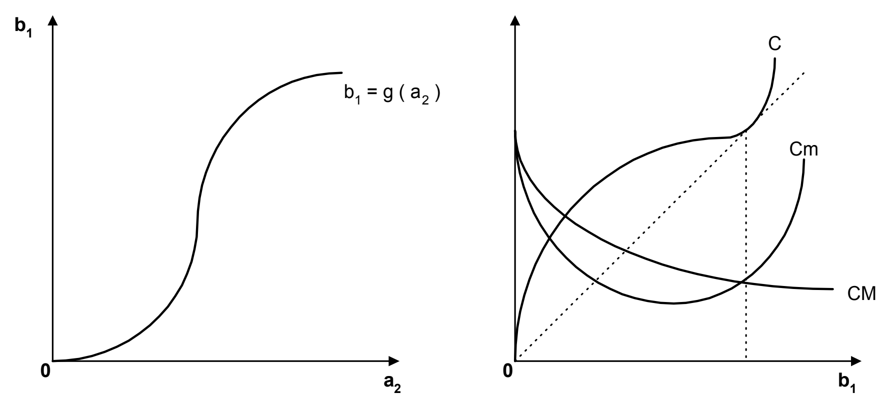
b) $\partial a_r / \partial p_s = \partial a_s / \partial p_r$ $\quad r, s = 2, 3, \ldots, \ell$

(**facultatif**) Liens entre la fonction de coût et la fonction de production

1. Les rendements marginaux décroissants impliquent que la fonction de coût tourne sa concavité vers le haut.

(**voir graphique 2-18**)

2-18



2. Le coût marginal est constant lorsque la fonction de production satisfait l'hypothèse des rendements à l'échelle constants.

3. Soit $CM = C/b_1$ le coût moyen. Ce dernier est croissant ou décroissant suivant qu'il est inférieur ou supérieur au coût marginal.

<u>Exemple 3</u>

Reprenons l'exemple 1 avec la fonction de production

$$b_1 = 2a_2^{1/3}a_3^{1/3}$$

Il s'agit maintenant de trouver la fonction de coût $C(p_2, p_3, \bar{b}_1)$.

Pour ce faire, on minimise le coût $C = p_2a_2 + p_3a_3$, sous contrainte que $2a_2^{1/3}a_3^{1/3} = \bar{b}_1$.

Formons le lagrangien : $L = p_2a_2 + p_3a_3 - \theta(2a_2^{1/3}a_3^{1/3} - \bar{b}_1)$.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour obtenir un minimum sont :

1) $$\frac{\partial L}{\partial a_2} = p_2 - \frac{2}{3}\theta a_2^{-2/3}a_3^{1/3} = 0$$

2) $$\frac{\partial L}{\partial a_3} = p_3 - \frac{2}{3}\theta a_2^{1/3}a_3^{-2/3} = 0$$

3) $$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 2a_2^{1/3}a_3^{1/3} - \bar{b}_1 = 0$$

De (1) et (2), on obtient : $p_2/p_3 = a_3/a_2$

d'où $a_2 = (p_3/p_2)\, a_3$

Substituons dans (3) : $$2\left(\frac{p_3}{p_2}a_3\right)^{1/3} a_3^{1/3} = \bar{b}_1$$

$$\Rightarrow \quad 2\left(\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/3} a_3^{2/3} = \bar{b}_1$$

$$\Rightarrow \quad a_3^* = \left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2} \quad \text{et} \quad a_2^* = \left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2}$$

a_2* et a_3* sont les fonctions de demande conditionnelle.

La fonction de coût $C(p_2, p_3, \bar{b}_1)$ est alors :

$$p_2a_2^* + p_3a_3^* = p_2\left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2} + p_3\left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2}$$

$$= 2\left(\frac{\bar{b}_1^3 p_2 p_3}{8}\right)^{1/2} = (½\bar{b}_1^{\,3}p_2p_3)^{½}$$

$$\Rightarrow \quad C(p_2, p_3, \bar{b}_1) = (½\bar{b}_1^{\,3}p_2p_3)^{½}$$

Avant d'aller plus loin, on veut vérifier quelques-unes des propriétés des fonctions de demande conditionnelle et de la fonction de coût.

a) Les fonctions de demande conditionnelle sont homogènes de degré 0 en p_2, p_3 :

$$a_2^* = a_2(p_2, p_3, \bar{b}_1) = \left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2}$$

$$a_2(tp_2, tp_3, \bar{b}_1) = \left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{tp_3}{tp_2}\right)^{1/2} = \left(\frac{\bar{b}_1^3}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2} = a_2(p_2, p_3, \bar{b}_1)$$

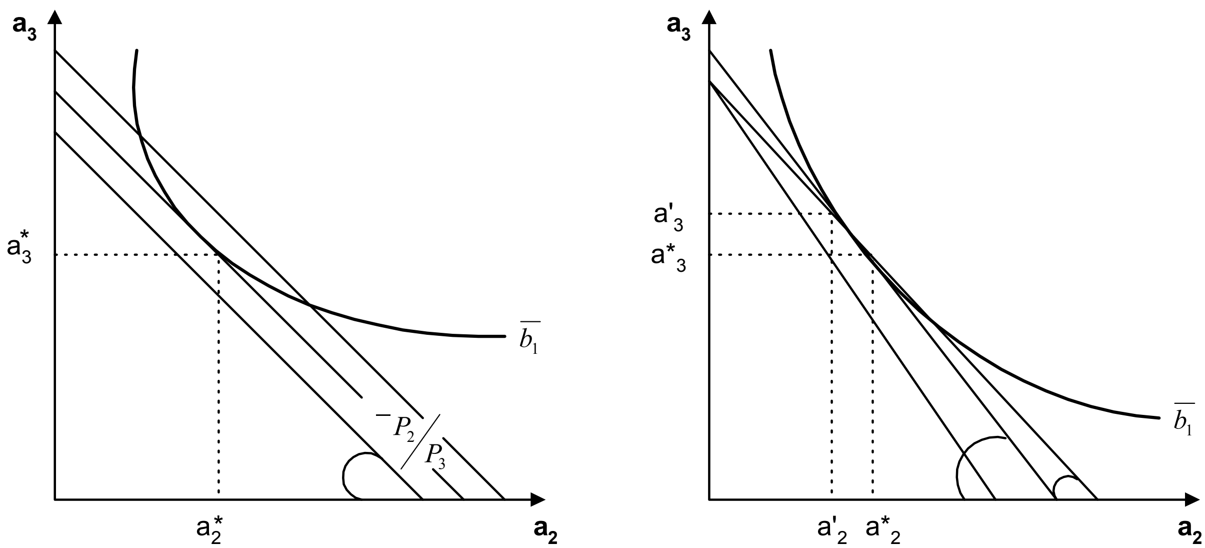
$\Rightarrow$ a_2 est homogène de degré 0 en p_2 et p_3, et le résultat est identique pour a_3.

Interprétation économique de l'homogénéité de degré 0 en p_2 et p_3 des fonctions de demande conditionnelle.

L'homogénéité de degré 0 en p_2 et p_3 implique que la variation du prix de chacun des inputs a_2 et a_3 dans les mêmes proportions (p_2 et p_3 doublent ou sont réduits de moitié, par exemple) n'aura aucun impact sur les demandes conditionnelles.

C'est normal : si les prix varient dans les mêmes proportions, alors le rapport des prix (p_2/p_3) ne change pas. Dans ce cas, puisque b_1 est fixé, les quantités qui minimisent le coût ne peuvent pas changer : (**voir graphique 2-19**)

2-19



Si le rapport des prix changeait, la pente de la droite d'isocoût changerait et les demandes conditionnelles seraient (a_2', a_3') plutôt que (a_2*, a_3*) comme le démontre le graphique de droite.

Donc, si le rapport des prix ne change pas, les demandes conditionnelles seront les mêmes. Cependant le coût minimum pour produire $\overline{b}_1$ sera différent, bien entendu.

b) $\partial a_2^*/\partial p_3 \quad = \quad \partial a_3^*/\partial p_2$

$$\partial a_2^*/\partial p_3 = \partial\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2} \Big/ \partial p_3 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8p_2p_3}\right)^{1/2}$$

$$\partial a_3^*/\partial p_2 = \partial\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2} \Big/ \partial p_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8p_3p_2}\right)^{1/2}$$

c) $\partial a_2^*/\partial p_2 \quad < \quad 0$: $\quad \partial\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2}\Big/\partial p_2 \quad = \quad -\frac{1}{2}\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}p_3}{8p_2^3}\right)^{1/2} < 0$

De même, $\quad \partial a_3^*/\partial p_3 < 0$.

d) $C(p_2, p_3, \overline{b}_1)$ est homogène de degré 1 en p_2 et p_3 :

$$
\begin{aligned}
C(tp_2, tp_3, \overline{b}_1) &= (\tfrac{1}{2}\,(tp_2)\,(tp_3)\ \overline{b}_1^{\,3})^{1/2} \\
&= t(\tfrac{1}{2}\, p_2\, p_3\ \overline{b}_1^{\,3})^{1/2} \\
&= tC(p_2, p_3, \overline{b}_1) \\
&\Rightarrow C(p_2, p_3, \overline{b}_1) \text{ est homogène de degré 1 en } p_2 \text{ et } p_3.
\end{aligned}
$$

Remarquons d'autre part qu'il suffit de dériver la fonction de coût par rapport à p_2 et p_3 pour retrouver les fonctions de demande conditionnelle :(application du Lemme de Shephard).

$$\partial\, C(p_2, p_3, \overline{b}_1)/\partial p_2 \quad = \quad \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\, p_3\ \overline{b}_1^{\,3})^{1/2}\, p_2^{-1/2} \quad = \quad \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{1/2} \quad = \quad a_2^*$$

$$\partial\, C(p_2, p_3, \overline{b}_1)/\partial p_3 \quad = \quad \tfrac{1}{2}\,(\tfrac{1}{2}\, p_2\ \overline{b}_1^{\,3})^{1/2}\, p_3^{-1/2} \quad = \quad \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2} \quad = \quad a_3^*$$

Finalement, montrons que θ^* est bien égal au coût marginal de b_1, i.e. $\quad \theta^* = \partial C/\partial b_1$.

De (1) (voir conditions de premier ordre), nous avons :

$$p_2 \quad = \quad \frac{2}{3}\,\theta\, a_2^{-2/3}\, a_3^{1/3}$$

Substituons a_2^* et a_3^* pour obtenir :

$$p_2 \quad = \quad 2/3\ \theta \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_3}{p_2}\right)^{-2/6}\left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/6}$$

$$\Rightarrow \quad p_2 \quad = \quad \frac{3}{2}\theta * \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{8}\right)^{-1/6}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{3/6} = \frac{2}{3}\theta * \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{2}\right)^{-1/2}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2}$$

$$\Rightarrow \quad \theta^* \quad = \quad \frac{2}{3}\theta * \left(\frac{\overline{b}_1^{\,3}}{2}\right)^{-1/2}\left(\frac{p_2}{p_3}\right)^{1/2} \quad = \quad 3/2\ (½\,\overline{b}_1\, p_2p_3)^{½}$$

Donc $\theta^* = 3/2\ (½\ \overline{b}_1\, p_2p_3)^{½}$

D'autre part :

$$\partial C/\partial b_1 = \partial[(½\ p_2p_3\overline{b}_1^{\,3})^{½}/\partial b_1 \quad = \quad 3/2\ (½\ p_2p_3\overline{b}_1)^{½}$$

On obtient, tel que prévue : $\theta^* = \partial C/\partial b_1$.

Après avoir trouvé la fonction de coût, ce qui nous intéresse c'est de déterminer quel est le b_1 qui maximise les profits.

Le problème à résoudre est donc :

$$\underset{b_1}{Max} \quad \pi = p_1b_1 - C(p_2, p_3, b_1)$$

i.e, $$\underset{b_1}{Max} \quad \pi = p_1b_1 - (½\ p_2p_3\overline{b}_1^{\,3})^{½}$$

La condition de premier ordre de ce problème de maximisation :

$$\partial\pi/\partial b_1 = \quad p_1 - 3/2\ (½\ p_2p_3b_1)^{½} = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 = 3/2\ (½\ p_2p_3b_1)^{½}$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1^2 = 9/8\ p_2p_3b_1 \quad \Leftrightarrow \quad b_1^* = 8/9\ (p_1^2/p_2p_3)$$

La fonction d'offre b_1^* est évidemment identique à celle que nous avions calculée à l'exemple 1 puisque la fonction de production est la même. Seule la démarche suivie est différente.

Décision de courte période

Supposons que a_3 soit fixé à $\overline{a}_3$. Seul l'input a_2 peut varier à court terme. On voudrait alors déterminer a_2* qui minimise $p_2a_2 + p_3\overline{a}_3$ sous contrainte que $\overline{b}_1 = 2a_2^{1/3}\overline{a}_3^{\,1/3}$.

Cependant, a_2 est entièrement déterminé par $\overline{b}_1$ et $\overline{a}_3$:

$$\overline{b}_1 = 2a_2^{1/3}\overline{a}_3^{\,1/3} \quad \Leftrightarrow \quad a_2^{1/3} = \overline{b}_1 / 2\overline{a}_3^{\,1/3} \quad \Leftrightarrow \quad a_2 = \overline{b}_1^{\,3} / 8\overline{a}_3$$

Il ne reste plus qu'à déterminer b_1* qui maximise les profits :

$$\underset{b_1}{Max} \;\; \pi = p_1b_1 - C(p_2, p_3, \overline{a}_3, b_1)$$

i.e. $$\underset{b_1}{Max} \;\; \pi = p_1b_1 - \left(\frac{p_2b_1^3}{8\overline{a}_3} + p_3\overline{a}_3\right)$$

$$\partial\pi/\partial b_1 = \quad p_1 - 3\left(\frac{p_2b_1^2}{8\overline{a}_3}\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \quad p_1 = 3\left(\frac{p_2b_1^2}{8\overline{a}_3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \quad b_1^* = \left(\frac{8\overline{a}_3p_1}{3p_2}\right)^{1/2}$$